УДК 629.3.027.4

Е.С. Клімов
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна
А.П. Солтус
Черкаський державний технологічний університет, Черкаси, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЕЛАСТИЧНОГО КОЛЕСА З ВІДВЕДЕННЯМ

Моделювання робочого процесу еластичного колеса під час руху з відведенням дозволяє визначитись із величиною бічної сили та стабілізуючого моменту з урахуванням пружних та конструктивних особливостей шини, тиску повітря. Представлено результати досліджень існуючих моделей шини (щітка, напружена струна, напружена балка) та розробленої моделі цілісношітільної шини, яка розглядає шину у складі оболонки, наповненої повітрям. При цьому властивості шини формуються пружними та конструктивними параметрами оболонки та пружністю наповнювача, яка створюється тиском повітря. Установлено, що шину можна розглядати цілісним тілом, якщо коефіцієнт опору бічному відведенню є стабільною величиною під час руху з відведенням та по криволінійній траєкторії, що можливо за номінального тиску повітря.

Ключові слова: *шина, контактний відбиток, математична модель, коефіцієнт опору бічному відведенню, бічна сила, стабілізуючий момент.*

Modeling the working process of an elastic wheel during movement with slip allows determining the magnitude of the lateral force and self-aligning torque, taking into account the elastic and structural features of the tire, inflation pressure. The results of research on existing tire models (brush, stretched string, stretched beam) and the developed solid-body tire model are presented, which considers the tire as part of a shell filled with air. In this case, the properties of the tire are formed by the elastic and structural parameters of the shell and the elasticity of the filler, which is created by inflation pressure. It is established that the tire can be considered as a solid body if the cornering stiffness is a stable value during movement with slip and along a curved trajectory, which is possible at rated inflation pressure.

Keywords: *tire, contact patch, mathematical model, cornering stiffness, lateral force, self-aligning torque.*

Мета. Визначитись із достовірністю математичних моделей щодо розрахунку бічної сили та стабілізуючого моменту шини під час плоскопаралельного руху з відведенням.

Серед існуючих моделей шини заслуговують уваги три моделі шини: щітка, напружена струна, напружена балка. Модель «**Щітка**» [1–5] включає жорсткий каркас з брекером та еластичний протектор, який представлено еластичними щетинками (щіткою). Під час руху шини з бічним відведенням щетинки входять в контакт з опорною поверхнею, а за наявності сил зчеплення відхиляються у бічному напрямку. Контактний відбиток моделі має форму прямокутника довжиною $2a$. Нормальний тиск по довжині контактного відбитка розподіляється за параболічним законом з нульовими значеннями тиску на передній та задній границі контактного відбитка. Величина коефіцієнта зчеплення μ вважається сталою.

Пружність щетинок еквівалентна пружності боковин каркаса та протектора, яку характеризують бічною жорсткістю на одиницю довжини контактного відбитка $c_{ру}$. Під її величиною розуміють відношення бічної жорсткості шини до довжини контактного відбитка та визначають за виразом:

$$c_{ру} = \frac{c_{ш}}{2a}, \quad (1)$$

де $c_{ру}$ – бічна жорсткість шини на одиницю довжини контакту, Н/м^2; $c_{ш}$ – бічна жорсткість шини, Н/м; a – половина довжини контактного відбитка, м.

Бічну жорсткість шини $c_{ш}$ визначають за стаціонарних умов як відношення бічної сили, прикладеної до диска колеса, до його бічного переміщення:

$$c_{ш} = \frac{F_y}{\Delta}, \quad (2)$$

де F_y – бічна сила, прикладена до диска нерухомого колеса, Н; Δ – бічне переміщення диска, на який діє бічна сила F_y, м.

Бічна сила під час руху з відведенням визначається за виразом [1]:

$$F_y = \mu F_z (1 - \lambda^3), \quad (3)$$

де F_z – нормальне навантаження на шину, Н; μ – коефіцієнт зчеплення; λ – коефіцієнт, що у відносній величині визначає довжину зони зчеплення під час руху з відведенням, який визначається так:

$$\lambda = 1 - \frac{2a^2 c_{py}\,\delta}{3\mu F_z},$$

де δ – поточне значення кута відведення, рад.

Стабілізуючий момент шини під час руху з відведенням визначають за виразом [1]:

$$M_z = \mu F_z a \lambda^3 (1 - \lambda). \quad (4)$$

Залежності (3) та (4) дозволяють визначити силу та момент у межах кута відведення $0 < \delta \leq \delta_{max}$, де δ_{max} – граничний за зчепленням кут відведення, рад. Його величину визначають так:

$$\delta_{max} = \frac{3\mu F_z}{2c_{py}a^2}. \quad (5)$$

Якщо $\delta \geq \delta_{max}$, то $F_y = \mu F_z$.

У моделі «**Напружена струна»** [1, 2, 6] протекторний пояс шини, який включає протектор, брекер та бігову доріжку каркасу, представляє напружену струну, яка у бічному напрямку підтримується пружинами. Пружини моделюють боковини каркасу. Тиск повітря у шині, діючи на протекторний пояс, яким є струна, спричинює її розтягнення.

Модель характеризують пружністю, довжиною релаксації та довжиною контакту з опорною поверхнею, наявністю тільки сил зчеплення у контакті з опорною поверхнею та рівномірним розподілом тиску на опорну поверхню. Пружність моделі, еквівалентну шині, характеризують бічною жорсткістю на одиницю загальної довжини контакту і релаксації та визначають за виразом [2]:

$$c_{py} = \frac{\text{к}_\text{y}}{2(a+\sigma)^2},$$

де c_{py} – бічна жорсткість шини на одиницю загальної довжини релаксації та контакту, Н/м^2; k_y – коефіцієнт опору бічному відведенню шини, Н/рад; σ – довжина релаксації струни, яка згідно з [2] знаходиться у межах $(0{,}6 – 1)r_к$ ($r_к$ – радіус колеса), м; a – половина довжини контакту шини, м.

Бічну силу визначають за виразом:

$$F_y = 2c_{py}\delta(a + \sigma)^2, \quad (6)$$

де δ – поточне значення кута відведення, рад.

Стабілізуючий момент визначають так [2]:

$$M_z = 2c_{py}a\delta\left[\frac{a^2}{3} + \sigma(a + \sigma)\right]. \quad (7)$$

У залежностях (6) та (7) кут відведення змінюється у межах, коли у контакті з опорною поверхнею знаходяться зони зчеплення. На асфальтобетонній поверхні для шин вантажних автомобілів величина цього кута не перевищує 5°.

У моделі «**Напружена балка»** [2, 6 – 9] каркас шини та брекер представляють балкою, а боковини шини та протектор є пружною основою, на яку спирається балка. Наявність пружної основи, яка знаходиться між балкою та опорною поверхнею, призведе, при дії на шину бічної сили, до руху колеса з відведенням. Водночас відбудеться деформація балки від дії бічної сили. Тиск на опорну поверхню вздовж контактного відбитка розподіляється за параболічним законом при нульових значеннях у крайніх точках. Пружність моделі характеризують бічною жорсткістю $c_ш$. Контактний відбиток шини являє прямокутник довжиною $2a$ та шириною $2b$. Коефіцієнт зчеплення постійний у контактному відбитку. Дослідження проводяться у межах кута відведення, за якого бічна сила під час руху з відведенням не перевищує сили зчеплення. Балка характеризується жорсткістю на згин EJ_z, де E – модуль Юнга, Н/м^2; $J_z = \int z^2 dA$ – момент інерції перерізу відносно осі повороту балки, м^4.

Балка у моделі виконує функції каркасу та брекеру реальної шини, тому бічна сила та стабілізуючий момент будуть визначатися пружною основою, створеною протектором і боковинами. Траєкторія руху точки контакту складається із ділянки зчеплення, яка є прямою лінією, та ділянки ковзання, яка являє частину параболи з нульовими значеннями в початковій та кінцевій точках.

Загальну бічну силу визначають як суму сил у зоні зчеплення та ковзання за виразом:

$$F_y = \frac{\text{с}_\text{ш}\delta x_b^2}{4a} + \frac{3\mu F_z}{4a}\left(\frac{4\text{a}}{3} - \frac{x_b^2}{a} + \frac{x_b^3}{3a^2}\right), \quad (8)$$

де x_b – довжина зони зчеплення у контакті, яку визначають так:

$$x_b = 2a\left(1 - \frac{ac_\text{ш}\delta}{3\mu F_z}\right), \quad (9)$$

де δ – поточне значення кута відведення, рад.

Стабілізуючий момент шини визначають так:

$$M_z = \frac{c_ш \delta x_b^2}{2a}\left(\frac{x_b}{3} - \frac{a}{2}\right) + \frac{3\mu F_z x_b^2}{4a}\left(1 - \frac{x_b}{a} + \frac{x_b^2}{4a^2}\right) \quad (10)$$

Кут відведення змінюється у межах $0 < \delta \le \delta_{max}$. Кут δ_{max} визначають за виразом (5).

У моделі «**Ціліснотільна шина»** [10] прийнято шину розглядати у складі оболонки, наповненої пружним матеріалом, яким є стиснене повітря або азот. Оболонка включає каркас, брекер, боковини та протектор та контактує з одного боку з ободом колеса, а з іншого – з опорною поверхнею. Контакт з опорною поверхнею здійснюється по площадці, яка у реальній шині наближається до овалу або прямокутника. Останні приводяться до рівновеликого прямокутника з довжиною контакту $2a$ та шириною $2b$. Пружні властивості шини (коефіцієнт опору бічному відведенню, бічна та кутова жорсткість) формуються конструкцією і пружністю оболонки та пружністю наповнювача. Вважається, що тіло шини цілісне за умови стабільності коефіцієнта опору бічному відведенню під час руху з відведенням та по криволінійній траєкторії. Аналіз досліджень засвідчив, що стабільність цього коефіцієнта забезпечується номінальним тиском повітря у шині (пружністю наповнювача оболонки). Тиск на опорну поверхню характеризується коефіцієнтом розподілу тиску β, який є відношенням максимального тиску у контакті до середнього. Установлено, що його значення змінюється від одиниці, що відповідає рівномірному розподілу тиску, до 1,5 при параболічному законі розподілу тиску. При еліптичному законі β = 1,27, а при усіченій параболі або трапеції коефіцієнт залежить від параметра усічення, але не перевищує 1,5.

Стабілізуючий момент шини при русі з кутом відведення $0 \le \delta \le \delta_M$, де δ_M – кут відведення, при якому стабілізуючий момент досягає максимуму, визначається за виразом:

$$M_z = M_{zmax}\left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{\delta_M}\right)^2\right], \quad (11)$$

де M_{zmax} – максимальний стабілізуючий момент шини, який виникає під час руху з кутом відведення δ_M.

При визначенні моменту M_{zmax} приймалось припущення, що у межах кута відведення $0 < \delta \le \delta_M$ коефіцієнт опору бічному відведенню k_y є стабільною величиною, а епюра залежності бічної сили від кута відведення являє прямокутний трикутник. У цьому випадку маємо:

$$M_{zmax} = \frac{k_y a \delta_M}{3\beta}, \quad (12)$$

де k_y – коефіцієнт опору бічному відведенню, Н/рад, β – коефіцієнт розподілу тиску; a – половина поздовжньої осі контактного відбитка, м.

Величину кута δ_M на опорній поверхні з високим коефіцієнтом зчеплення рекомендується приймати для шин вантажних автомобілів δ_M = 0,0872 рад, а для шин легкових – 0,0698 рад.

Під час руху з кутом відведення $\delta_M \le \delta \le \delta_{max}$ стабілізуючий момент шини буде:

$$M_z = M_{zmax}\left[1 - \left(\frac{\delta - \delta_M}{\delta_{max} - \delta_M}\right)^2\right], \quad (13)$$

де δ_{max} – граничний за зчепленням кут відведення, при якому у контактному відбитку наявні тільки зони ковзання, а стабілізуючий момент дорівнює нулю. Цей кут визначається так:

$$\delta_{max} = \frac{2\beta\mu F_z}{k_y}. \quad (14)$$

Бічну силу будемо визначати, розділивши залежність $F_y = f(\delta)$ на дві ділянки: часткового ковзання та повного ковзання. Ділянка часткового ковзання буде при куті відведення $0 < \delta < \delta_{max}$, а бічну силу визначимо за виразом:

$$F_y = \frac{k_y \delta}{\beta}\left(1 - \frac{k_y \delta}{4\beta\mu F_z}\right). \quad (15)$$

Для ділянки повного ковзання при куті відведення $\delta \ge \delta_{max}$ у контактному відбитку наявні тільки зони ковзання, а бічна сила досягає максимального за зчепленням значення $F_{ymax} = \mu F_z$.

Для аналізу наведених залежностей як об'єкт досліджень використано автомобіль КрАЗ колісної формули 6х6, обладнаний широкопрофільними шинами розміру 1300х530-533 мод. ВИД-201 при номінальному тиску повітря 0,4 МПа та навантаженні на шину керованого колеса 27000 Н. Експериментально визначалась бічна жорсткість шини при прикладанні бічного зусилля до диска колеса у межах до $0{,}1F_y$ та бічне переміщення диска на асфальтобетонній поверхні з високим коефіцієнтом зчеплення. За такої умови у контактному відбитку умовно відсутні зони ковзання, а середнє значення бічної жорсткості шини склало $c_ш$ = 780900,2 Н/м. Половина поздовжньої осі контактного відбитка, приведеного до рівновеликого прямокутника, становила a = 0,145 м. Коефіцієнт опору бічному відведенню, враховуючи [10], визначався побічним методом за виразом: $k_y = c_ш a$. Після підстановки отримаємо: k_y = 780900,2 × 0,145 = 113230,5 Н/рад.

Експериментально стабілізуючий момент шини визначався під час руху правого керованого колеса з кутом відведення δ, який при знятій поперечній тязі установлювався фіксацією правого керованого колеса спеціальним кронштейном. Кронштейн кріпився з одного боку до правого важеля кермової трапеції, а з іншого – до драбин кріплення правої ресори. Зміною довжини кронштейну задавався кут відведення. Лівим керованим колесом при знятій поперечній тязі задався прямолінійний рух автомобілю. Під час проведення досліджень клинами між балкою керованого моста та передніми ресорами установлювався нульовий кут поздовжнього нахилу шворня. Методом тензометрування кронштейну визначався стабілізуючий момент шини.

Розрахунки бічної сили та стабілізуючого моменту проведені за вихідними даними шини розміру 1300х530-533 мод. ВИД-201: p_w = 0,4МПа, F_z = 27000 Н, k_y =113230,5 Н/рад, a = 0,145 м, μ = 0,7, $r_к$ = 0,6 м, σ = 0,6$r_к$, δ_M = 5°. При розрахунку за моделями щітка та балка приймався параболічний закон розподілу тиску β = 1,5, а за моделями струна та цілісностільна шина – рівномірний β = 1. За цими даними при рівномірному розподілі тиску $\delta_{max} = \frac{2x0,7x27000}{113230,5}$ = 0,334 рад, а при параболічному – $\delta_{max} = \frac{3x0,7x27000}{113230,5}$ = 0,5 рад. Результати розрахункових та експериментальних даних бічної сили та стабілізуючого моменту наведено на рис. 1 та рис. 2.

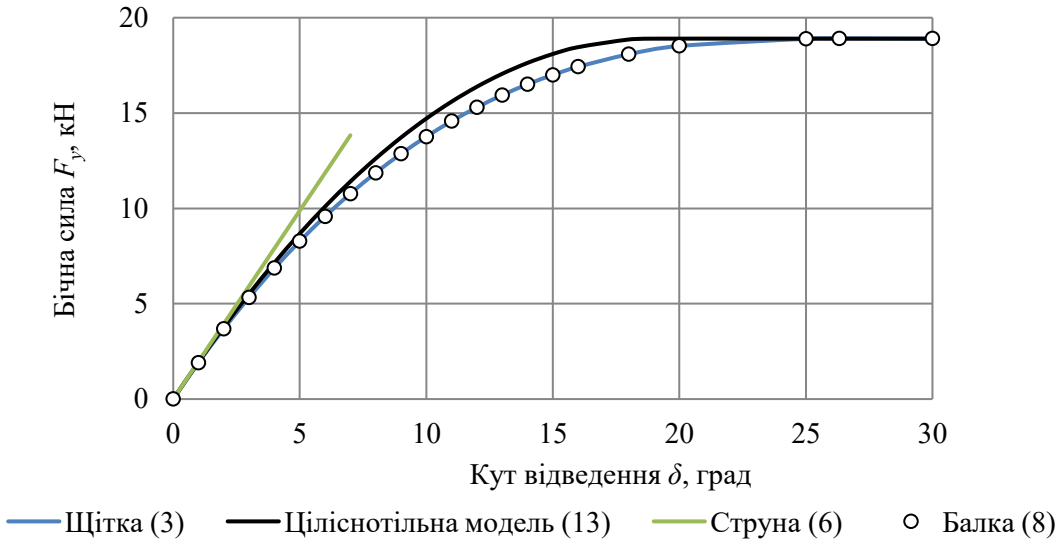

Рисунок 1 – Залежність $F_y = f(\delta)$

Із аналізу рис. 1 видно, що розрахункові значення бічної сили за моделями щітка, балка та цілісностільна шина дають результати бічної сили, які відрізняються у межах до 7%. Водночас за моделлю струна розраховувати бічну силу можливо лише до кута відведення до 1°.

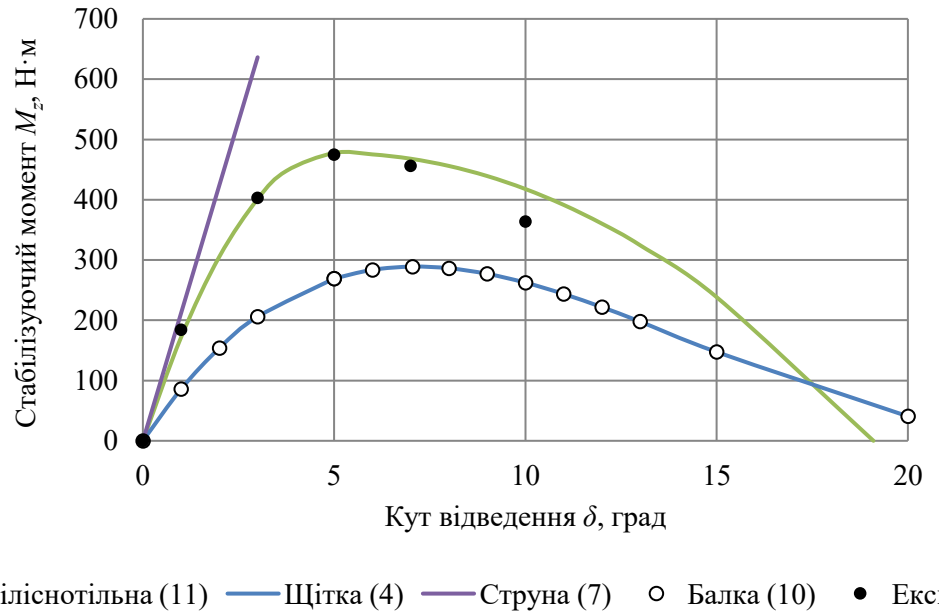

Рисунок 2 – Залежність $M_z = f(\delta)$

Із аналізу рис. 2 видно, що тільки цілісно­тільна модель шини, в якій прийнято рівномірний розподіл тиску та приведений до рівновеликого прямокутника контактний відбиток, забезпечує відповідність розрахункових значень стабілізуючого моменту з експериментом. Розрахункові значення моменту за моделями щітка та балка повністю збігаються між собою, а за абсолютним значенням вони до двох разів занижені порівняно з експериментальними. Це пояснюється параболічним законом розподілу тиску у цих моделях. Щодо моделі струна, то стабілізуючий момент можливо розраховувати у межах кута відведення лише до 1°.

З аналізу наведених досліджень випливають наступні висновки:

1. Тільки цілісно­тільна модель шини, що враховує реальний розподіл тиску у контакті з опорною поверхнею та його розміри, бічну жорсткість шини та її зміну залежно від кута відведення, дозволяє визначити реальні значення бічної сили та стабілізуючого моменту під час руху з відведенням.

2. Розрахункові значення бічної сили та стабілізуючого моменту за моделями щітка та балка однакові, що пояснюється параболічним законом розподілу тиску у контакті та пружністю, яка створюється протектором та боковинами шини. Водночас розрахований стабілізуючий момент відрізняється від експериментального, оскільки фактичний тиск у відбитку не відповідає параболічному, який закладено у цих моделях.

3. За моделлю струна можливо розраховувати бічну силу та стабілізуючий момент лише при куті відведення до 1°.

4. Розглядати шину цілісним тілом у складі оболонки та пружного наповнювача, яким є повітря або азот, можливо при відповідності конструктивних та пружних властивостей оболонки тиску повітря у шині. Водночас номінальний тиск повітря забезпечує стабільність коефіцієнта опору бічному відведенню під час руху з відведенням та по криволінійній траєкторії.

Перелік джерел посилання

1 Pacejka H.B. Tire and Vehicle Dynamics, 3rd ed.; Elsevier: Oxford, UK, 2012.

2 Nakajima Y. Advanced tire mechanics. Singapore: Springer Nature, 2019. 1265 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-5799-2.

3 Romano L., Bruzelius F., Jacobson B. Brush tyre models for large camber angles and steering speeds. *Vehicle System Dynamics.* 2022. 60(4), 1341–1392. https://doi.org/10.1080/00423114.2020.1854320

4 Sorniotti A., Velardocchia M. Enhanced tire brush model for vehicle dynamics simulation. *SAE International Technical Paper.* 2008. 2008-01-0595. doi: 104171/2008-01-0595.

5 Stocco D., Biral F., Bertolazzi E. A physical tire model for real-time simulations. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2024. 223, 654-676.

6 Wong, J.Y. Theory of Ground Vehicles, 5th ed.; JohnWiley & Sons, Inc.: New York, NY, USA, 2022. 560p.

7 E. Fiala, Seitenkrafte am Rollenden Luftreifen. *VDI Zeitschrift.* 1954. 96. 973–979.

8 Sakai, H. Theoretical and experimental studies on the dynamic properties of tyres Part 1: Review of theories of rubber friction. *Int. J. Veh. Des*. 1981. 2. 78–110.

9 Sakai, H. Theoretical and experimental studies on the dynamic properties of tyres. Part 2: Experimental investigation of rubber friction and deformation of a tyre. *Int. J. Veh. Des*. 1981. 2. 182–226.

10. Солтус А.П, Клімов Е.С, Тарандушка Л.А. Визначення коефіцієнта опору бічному відведенню. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2025. № 2 (25). С. 273–283. DOI 10.36910/automash.v2i25.1937.

КЛІМОВ Едуард Сергійович – к.т.н., доцент, завідувач кафедри автомобілів і тракторів, Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, e-mail: edward.klimov@gmail.com

СОЛТУС Анатолій Петрович – д.т.н., професор, професор кафедри автомобілів та технологій їх експлуатації, Черкаський державний технологічний університет, e-mail: auto.soltus@gmail.com